UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526

Práctica 1
Soluciones
Gustavo Lau
2021-05-15

1. Utilice el Principio de Inducción para demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \left( n \geq 1 \implies \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

**Respuesta**

Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv \left( \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

Paso base:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$

$$\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$$

$\therefore P(1)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $P(n) \wedge n \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^{n+1} i &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \qquad \text{(sumando } n+1 \text{ a ambos lados)} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \sum_{i=1}^{n+1} i &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

$\therefore P(n) \implies P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \left( n \geq 1 \implies \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \right)$

2. Utilice el Principio de Inducción para demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq 3 \implies 2n + 1 < 2^n)$$

**Respuesta**

Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv (2n + 1 < 2^n)$$

Paso base:

$$2 \times 3 + 1 = 7$$
$$2^3 = 8$$

$\therefore P(3)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $P(n) \wedge n \geq 3$

$$\begin{aligned} 2n + 1 &< 2^n \\ 2n + 3 &< 2^n + 2 && \text{(sumando 2 a ambos lados)} \\ 2(n+1) + 1 &< 2^n + 2^n && \text{(ya que } 2 < 2^n \text{ pues } n \geq 3\text{)} \\ 2(n+1) + 1 &< 2^n(1+1) \\ 2(n+1) + 1 &< 2^{n+1} \end{aligned}$$

$\therefore P(n) \implies P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \, (n \geq 3 \implies 2n + 1 < 2^n)$

3. Dado un conjunto $S$, $|S|$ es su cardinalidad (el número de elementos en $S$) y $\mathcal{P}(S)$ es el conjunto de partes de $S$ (el conjunto formado por todos los subconjuntos de $S$). Utilice el Principio de Inducción para demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (|S| = n \implies |\mathcal{P}(S)| = 2^n)$$

**Respuesta**

Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv (|S| = n \implies |\mathcal{P}(S)| = 2^n)$$

Paso base:

$$\begin{aligned} |S| &= 0 \\ S &= \varnothing && \text{(el único conjunto con 0 elementos es el conjunto vacío)} \\ \mathcal{P}(S) &= \{\varnothing\} \\ |\mathcal{P}(S)| &= 1 \\ |\mathcal{P}(S)| &= 2^0 \\ \therefore |S| = 0 &\implies |\mathcal{P}(S)| = 2^0 \end{aligned}$$

$\therefore P(0)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $P(n)$

$|S| = n \implies |\mathcal{P}(S)| = 2^n$

Sea $T$ un conjunto cualquiera con $n+1$ elementos:

$$\begin{aligned}
&T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}\} \\
&|T \setminus \{t_{n+1}\}| = n \\
&|\mathcal{P}(T \setminus \{t_{n+1}\})| = 2^n \qquad \text{(por la hipótesis inductiva)}
\end{aligned}$$

Cada subconjunto de $T$ puede obtenerse de la unión del resultado de estas dos operaciones:

op1 $=$ escoger un subconjunto de $T \setminus \{t_{n+1}\}$

op2 $=$ escoger un subconjunto de $\{t_{n+1}\}$

Por la hipótesis inductiva para op1 hay $2^n$ posibilidades.

Independientemente de op1 para op2 hay 2 posibilidades: $\varnothing$ y $\{t_{n+1}\}$.

Por el principio fundamental (de multiplicación) el número de subconjuntos de $T$ es:

$$\begin{gathered}
2^n \times 2 \\
2^{n+1} \\
|\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1} \\
\therefore |T| = n+1 \implies |\mathcal{P}(T)| = 2^{n+1}
\end{gathered}$$

$\therefore P(n) \implies P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}\,(|S| = n \implies |\mathcal{P}(S)| = 2^n)$

4. Suponga que $F_n$ es el $n$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Los números de Fibonacci se definen inductivamente como:

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n > 1$$

Utilice el Principio de Inducción para demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \left(n \geq 1 \implies F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n\right)$$

**Respuesta**

Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv \left(F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n\right)$$

Paso base:

$$\begin{aligned}
&F_1^2 = 1 \\
&F_0F_2 - (-1)^1 = 0 \times 1 - (-1) = 1
\end{aligned}$$

$\therefore P(1)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $P(n)$

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n$$

Tesis: $P(n+1)$

$$F_{n+1}^2 = F_nF_{n+2} - (-1)^{n+1}$$

Como queremos que el último término sea $(-1)^{n+1}$ multiplicamos la hipótesis por -1:

$$\begin{aligned}-F_n^2 &= -F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^{n+1}\\ F_{n-1}F_{n+1} &= F_n^2 - (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

Al margen, para deducir qué conviene hacer:

$$F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_{n+1} = (F_n + F_{n-1})F_{n+1} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1}$$

Como queremos que el término de la izquierda sea $F_{n+1}^2$ sumamos a ambos lados $F_nF_{n+1}$:

$$\begin{aligned}F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_{n+1} &= F_nF_{n+1} + F_n^2 - (-1)^{n+1}\\ F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) &= F_n(F_{n+1} + F_n) - (-1)^{n+1}\\ F_{n+1}F_{n+1} &= F_nF_{n+2} - (-1)^{n+1}\\ F_{n+1}^2 &= F_nF_{n+2} - (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

$\therefore P(n) \implies P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}\,(n \geq 1 \implies F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n)$

5. Utilice el Principio de Inducción para demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ (\forall x, y \in \mathbb{N}\,((x^n - y^n) \text{ es múltiplo de } (x-y)))$$

**Respuesta**

Definimos la proposición:

$$P(n) \equiv (\forall x, y\ (x^n - y^n) \text{ es múltiplo de } (x-y))$$

Paso base:

$$\begin{aligned}&x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0\\ &(x-y),0 = 0\\ &x^0 - y^0 \qquad \text{es múltiplo de } (x-y)\end{aligned}$$

$\therefore P(0)$

Paso inductivo:

Hipótesis: $P(n)$

$$
\begin{aligned}
&\forall x, y\ (x^n - y^n) \text{ es múltiplo de } (x-y)\\
x^{n+1} - y^{n+1} &= x \times x^n - y \times y^n\\
&= x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1} \qquad \text{(restamos y sumamos } xy^n\text{)}\\
&= x(x^n - y^n) + y^n(x-y)
\end{aligned}
$$

Por hipótesis inductiva el primer sumando es múltiplo de $(x-y)$.

El segundo sumando también es múltiplo de $(x-y)$, entonces

$(x^{n+1} - y^{n+1})$ es múltiplo de $(x-y)$

$\therefore P(n) \implies P(n+1)$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}\,(\forall x, y \in \mathbb{N}\,((x^n - y^n) \text{ es múltiplo de } (x-y)))$

6. Suponga que hay estampilas de correos de 3 unidades y de 5 unidades. Demostrar que se puede pagar cualquier monto mayor o igual a 8 unidades.

   **Respuesta**

   Definimos la proposición: $P(n) \equiv$ (Se puede pagar un monto de n unidades)

   Paso base:

   $3 + 5 = 8$

   $\therefore P(8)$

   Paso inductivo:

   Hipótesis: $P(n) \wedge n \geq 8$ Hay dos casos:

   *a*) Si para $n$ se usó una estampilla de 5 entonces reemplazarla con dos estampillas de 3. El monto aumenta en 1.

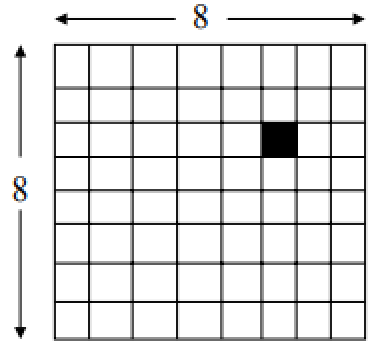
   *b*) Si para $n$ no se usó una estampilla de 5 entonces, como $n \geq 8$, se usaron al menos tres estampillas de 3. Reemplazar esas 3 con dos de 5. El monto aumenta en 1.

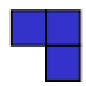
   $\therefore P(n) \implies P(n+1)$

   $\therefore \forall n \in \mathbb{N}\,$(Se puede pagar un monto de n unidades)

7. Opcional:

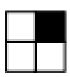
   Dado un entero positivo, n, ¿se pueden colocar mosaicos en forma de L como el que muestra el dibujo, sin solaparse, llenando cualquier cuadrícula de $2^n \times 2^n$ excepto un cuadrado eliminado? Los mosaicos se pueden rotar.

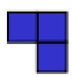
   
   

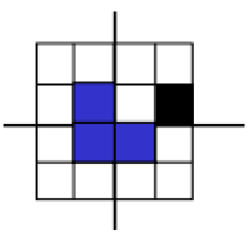
   **Respuesta**

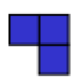
   Caso base ($n = 1$):

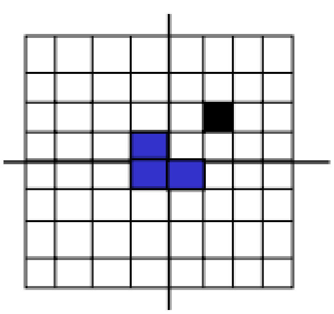
   

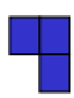
   Caso $n = 2$:

   Paso inductivo:

# Problemas no resueltos en clase de práctica

8. Opcional:

   Suponga la definición inductiva para la suma en los números naturales dada en clase. Utilice el Principio de Inducción para demostrar que:

   *a*) $\forall n \in \mathbb{N}(0 + n = n)$
   
   *b*) $\forall m, n \in \mathbb{N}(m + s(n) = s(m) + n)$
   
   *c*) $\forall m, n \in \mathbb{N}(m + n = m + n)$
   
   *d*) $\forall m, n, p \in \mathbb{N}(m + (n + p) = (m + n) + p)$

   **Respuesta**

   Ver libro del profesor Yriarte, páginas 64-66.